CHAPITRE

3

Suites et séries de fonctions

Dans ce chapitre, on étudie la limite des suites de fonctions. Le point qui nous interesse est celui de la consevation desPropriétés, de la suite de fonction par passage à la limite, par exemple si la suite de fonction est continue quand est-ce que sa limite est continue ?
On étudie aussi les défférentes convergence des séries de fonctions, ainsi que les Propriétés de sa somme (continuité, dérivabilité, Intégrabilité).

1 Suites de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction d'un ensemble I non vide à valeurs réelles ou complexes

$$\begin{array}{rcccl} f_n & : & I & \to & \mathbb{R}(\text{ou}\mathbb{C}) \\ & & x & \mapsto & f_n(x) \end{array}$$

1 1 Convergence Simple

Définition 0

On dit que la suite de fonction $(f_n)_n$ converge simplement (CVS) vers f sur I si et seulement si, pour tout x de I, la suite numérique $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ (la convergence simple est aussi appelée convergence ponctuelle ou convergence point par point).i.e $(\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x))$
Autrement dit, (f_n) CVS vers f sur I si et seulement si

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \qquad (n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$$

.

Remarque 3.1

On remrque ici que l'entier naturel N depend de x et de ε.
En pratique pour montrer la convergene simple, on fixe x et on étudie la suite $x \to f_n(x)$.

Exemple 3.1

Soit la suite de fonction (f_n) définie par :

$$\begin{array}{rcccl} f_n & : & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f_n(x) = \frac{nx}{1+nx} \end{array}$$

si $x = 0$ on a $f_n(0) = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.
si $x > 0$, On a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{nx}{1+nx} = 1$.
$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$
D'où $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$
avec

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si x=0}\,; \\ 1, & \text{si x>0}. \end{cases}$$

Exemple 3.2

Soit la suite de fonction (f_n) définie par :

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = nxe^{-nx} + x \end{array}$$

si $x = 0$ alors

$$f_n(0) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$$

.
si $x > 0$, On a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} nxe^{-nx} + x = x$.
$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = x$
Donc (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(x) = x$

Remarque 3.2

On remarque que dans les exemples 1) et 2) les suites de fonctions $(f_n)_n$ sont continue mais la limite simple f pour exemple 1 n'est pas continue, par contre la limite simple est continue pour l'exemple 2).
Donc converge simplement est Insiffisant pour conserver les proprietes de f_n, par exemple la continuite. On a alors besoin de ce qu'on appelle la convergence uniforme.

1 2 Convergence Uniforme

Définition 2

On dit que la suite de fonction $(f_n)_n$ converge Unifomement (CVU) vers f sur I si et seulement si, pou tout$x \in I$, $\quad \lim_{n\to+\infty} (\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|) = 0$

Autrement dit, (f_n) CVU vers f sur I si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \qquad (n \geq N \Rightarrow \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$$

. (ce qui suppose que $f_n - f$ est bornée à partir d'un certain rang). Cette propriété équivaut à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, \qquad (n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$$

.

Remarque 3.3

Pour la convergence uniforme, l'entier naturel N **depend seulement** de ε et **ne dépend pas de** x.

Proposition 3.1

Si $(f_n)_n$ C.V uniformement vers f alors $(f_n)_n$ converge simplement vers f.

Preuve :
On a , $\forall x \in I$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$$

Si $\lim_{n\to+\infty} (\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|) = 0$ alors
$\forall x \in I, \quad \lim_{n\to+\infty} |f_n(x) - f(x)|) = 0$ d'ou $\forall x \in I, \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \square$

En pratique pour Montrer la convergence uniforme, On fixe n et on etudie la fonction $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$ (où f est determiner par la C.V. Simple) On calcule (ou en estime) $\sup_x |g_n(x)|$ celui ci tend vers 0 ou non et on obtient ainsi la reponse.
Voici deux criters qui permettent de conclure soit à la C.V. uniforme ou non-convergence uniforme :

Critere 1 :

La suite $(f_n)_n$ converge uniformement vers f SSI il existe une suite $(U_n)_n$ tq $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ et $\forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq U_n$
i.e $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \leq U_n$

Critere 2 :

S'il existe une suite $(U_n)_n$ de points de I telle que la suite numérique $(f_n(U_n) - f(U_n))_n$ ne tend pas vers 0 (e.i $\underset{n\to+\infty}{(}\ f_n(U_n) - f(U_n)) \neq 0$) alors la suite de fonction $(f_n)_n$ ne converge pas unifomement vers f
En effet Si $(f_n)_n$ converge unifomement vers f sur I, alors pour toute suite $(U_n)_n$ d'éléments de I

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |f_n(U_n) - f(U_n)| \leq \sup_{x\in I} |f_n(U_n) - f(U_n)|$$

et donc $(f_n(U_n) - f(U_n))_n$ converge vers 0 par encadrement.

Exemple 3.3

Soit $(f_n)_n$ la suite fe fonction définie par :

$$\begin{array}{cccc} f_n & : & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f_n(x) = \frac{nx}{1+nx} \end{array}$$

* On sait que (f_n) converge Simplement vers f défini par :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si x=0 ;} \\ 1, & \text{si x>0.} \end{cases}$$

Soit $a > 0$ étudions la converge uniforme de $(f_n)_n$ sur $[a, +\infty[$
$\forall x \in [a, +\infty[$, on pose
$g_n = f_n(x) - f(x) = \frac{-1}{1+nx} \quad \Rightarrow \quad \sup_{x\in[a,+\infty[} |g_n(x)| = \sup_{x\in[a,+\infty[}(\frac{1}{1+nx})$
Soit on calcule le $\sup_{x\in[a,+\infty[}(\frac{1}{1+nx})$ ou bien on l'estime.
On pose $h_n(x) = \frac{1}{1+nx}, \qquad x \geq a$ alors $h_n'(x) = \frac{-n}{(1+nx)^2} \leq 0$
$\Rightarrow \qquad \sup_{x\in[a,+\infty[}(\frac{1}{1+nx}) = \sup_{x\in[a,+\infty[} h_n(x) = \frac{1}{1+an}$
$\Rightarrow \qquad \lim\limits_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,+\infty[}(f_n(x) - f(x)) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+an} = 0$
C.à.d $(f_n)_n$ C.V.U vers f
* Estimation de $\sup_{x\in[a,+\infty[}(\frac{1}{1+nx})$
On a $x \geq a \Rightarrow 1 + nx \geq 1 + na \Rightarrow \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{1+na}$
$\Rightarrow \qquad \sup_{x\in[a,+\infty[} \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{1+na} = U_n$
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,+\infty[} \frac{1}{1+nx} = 0$
****Question** : Y-a-t il CV Uniforme sur $[0, a[$
-Sur $[0, a[$ On a
$\sup_{x\in[0,a[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,a[} |\frac{nx}{1+nx} - 1| = \sup_{x\in[0,a[} |\frac{1}{1+nx}$
On pose $h_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ donc $h_n'(x) = \frac{-n}{(1+nx)^2} \leq 0$
D'où $\sup_{x\in[0,a[} |f_n(x) - f(x)| == 1 \neq 0$
Finalement, la suite $(f_n)_n$ ne CV pas Uniformement sur $[0, a[$
On remarque aussi que la suite $(f_n)_n$ ne CV pas Uniformement sur $[0, +\infty[$ car $\sup_{x\in[0,a[} |f_n(x) - f(x)| == 1 \neq 0$
Mais, on a $\forall a > 0, \quad (f_n)$ CV Uniformement sur $[0, +\infty[$.

1 3 Critére de Cauchy de Convergence Uniforme

Définition 3

On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ le critère de Cauchy uniforme sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \quad \text{tel que } \forall n \geq N_\varepsilon, \forall m \geq N_\varepsilon, \forall x \in I, \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \quad \text{tel que } \forall n \geq N_\varepsilon, \forall m \geq N_\varepsilon, \forall x \in I, \quad \sup_{x\in I} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$$

Théorème 0

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in N}$ est uniformément convergente sur I si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy uniforme.

Démonstration.

$\Rightarrow$)

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| + \sup_{x\in I} |f_m(x) - f(x)|$$

où f_n CV. U vers f sur I.

$\Leftarrow$) Supposons que $(f_n)_{n\in N}$ soit uniformément de Cauchy sur I. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \quad \text{tel que } \forall n \geq N_\varepsilon, \forall m \geq N_\varepsilon, \forall x \in I, \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \qquad (*)$$

Pour tout x fixé dans I, la suite $(f_n(x))_{n\in N}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, elle converge donc vers un scalaire $f(x)$

En faisant tendre m vers l'infini dans (*), on déduit que.

$$\forall n \geq N_\varepsilon, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$$

. c'est à dire que f_n CV. U vers f sur I.

1 4 Propriétés des fonctions stables par convergence uniforme

1. continuité

Théorème 0

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions contitues sur un intevalle I de $\mathbb{R}$
Si $(f_n)_n$ convergent uniformément vers une fonction f sur l'intervalle I, alors f est continue sur cet intervalle.

Preuve.

Soit $x_0 \in I$, montrons que f est continue en x_0 c.à.d
$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \qquad (|x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$
soit alors $\varepsilon > 0$ quelconque, on a $(f_n)_n$ CV. Uniformement vers f sur I alors

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N} \qquad (n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

En particulier pour $x = x_0$ et $n = N$, on a alors , $\forall n \geq N$

$$\forall x \in I, \qquad |f_N(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

On a aussi la fonction f_N est une fonction continue en x_0
alors

$$\exists \eta > 0, \forall x \in I, \qquad (|x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

D'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I \text{Si} |x - x_0| \leq \eta$$

alors

$$|f(x)-f(x_0| \leq |f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(x_0|+|f_N(x_0-f(x_0| \leq \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

Finalement

$$\forall \varepsilon>0, \exists \eta>0, \forall x \in I \qquad |x-x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(x_0| \leq \varepsilon$$

Remarque 3.4

la convergence simple d'une suites fe fonctions $(f_n)_n$ continue vers une fonction f . ne donne pas necessairement la coontinuité de f

Par exemple

soit $(f_n)_n$ la suite de fonction définie par :

$$\begin{array}{cccc} f_n & : & [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f_n(x)=x^n \end{array}$$

* On sait que (f_n) converge Simplement vers f définie par :

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x<1, \\ 1, & \text{si x=1.} \end{cases}$$

On a (f_n) est continue sur $[0,1]$ converge simplement vers f mais la fonction f n'est pas continue sur I, donc (f_n) n'est pas converge uniforme.

2. Intégration

Théorème 0

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions contitue convergente uniformément vers une fonction f sur l'intervalle $[a,b]$, $(a<b)$ alors :

1. $$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b \lim_{n \to +\infty} f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$
2. La suite de fonctions $(F_n)_n$ féfinie par :

$$\begin{array}{cccc} F_n & : & [a,b] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & F_n(x)=\int_a^b f_n(x)dx \end{array}$$

Converge uniformement vers la fonction F définie par

$$F(x)=\int_a^b f(x)dx$$

Preuve.

1) On a : $\forall x \in [a,b]$

$$0 \leq |f_n(x)-f(x)| \leq \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x)-f(x)|$$

$$\Rightarrow \int_a^b |f_n(x)-f(x)|dx \leq \int_a^b \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x)-f(x)|dx$$

$$\Rightarrow |\int_a^b (f_n(x)-f(x))dx| \leq \int_a^b |f_n(x)-f(x)|dx \leq \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x)-f(x)|(b-a)$$

Si $(f_n)_n$ C.V.Uniformement vers f sur $[a,b]$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty}|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx$$

2) On veut demontrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[a,b]}|F_n(x) - F(x)| = \lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[a,b]}|\int_a^x f_n(t)dt - \int_a^x f(t)dt| = 0$$

On a $(f_n)_n$ converge uniformememt vers f sur $[a,b]$ alors

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists N\in\mathbb{N},\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad \forall y\in[a,b],\quad (n\geq N\Rightarrow|f_n(y)-f(y)|\leq\frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\quad \exists N\in\mathbb{N},\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad \int_a^b|f_n(y)-f(y)|dy\leq\int_a^b\frac{\varepsilon}{b-a}dy=\varepsilon$$

Soit $x\in[a,b]$

$$\begin{aligned}|\int_a^x f_n(t)dt - \int_a^x f(t)dt| &= |\int_a^x (f_n(t)-f(t)dt| \\ &\leq \int_a^x |f_n(t)-f(t|dt \\ &\leq \int_a^b |f_n(x)-f(x|dx\end{aligned}$$

D'où,

$$\sup_{x\in[a,b]}|\int_a^x f_n(t)dt - \int_a^x f(t)dt| \leq \int_a^b |f_n(x)-f(x|dx \leq \varepsilon \qquad \text{dés que} n\geq N$$

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists N\in\mathbb{N},\quad \forall n\in\mathbb{N},\qquad (n\geq N\Rightarrow\sup_{x\in[a,b]}|F_n(x)-F(x)|\leq\varepsilon$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[a,b]}|F_n(x)-F(x)|=0 \qquad \square$$

Remarque 3.5

1) Si$(f_n)_n$ est Rieman-Integrable sur $[a, b]$ au lieu de "continue" dans le Théoréme précedent, on a f est Rieman-Integrable et
$\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

2) Le Théoreme montre qu'on peut echanger l'integration et la passage à la limite, Si les $(f_n)_n$ sont continues (ou bien Rieman-Integrable) et convergeant uniformement vers f sur un intervalle fermé borné.

3) L'intervalle fermé borné est necessaire.
En effet dans le cas où les $(f_n)_n$ sont Rieman-Integrable, on consédere

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } x \in [0, n], \\ 0, & \text{si x >n.} \end{cases}$$

On a $(f_n)_n$ CV. Simplement vers f définie par $f(x) = 0, \qquad \forall x \geq 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^{+\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^n \frac{1}{n}dx = 1 \neq \int_a^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = 0$$

Exemple 3.4

Soit la suite de fonction $(f_n)_n$ definie par :

$$\begin{array}{cccc} f_n & : & [0,\frac{\pi}{2}] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f_n(x) = \sin^n(x)(1-\sin(x))^n \end{array}$$

Cherechons la CV Simplement de (f_n)
Soit $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$ fixé.
Si $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ alors $0 \leq \sin(x) < 1$ D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin^n(x) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-\sin(x))^n = 0$
Si $x = \frac{\pi}{2}$ alors $f_n(\frac{\pi}{2}) = 0$
D'où (f_n) CV Simplement vers la fonction nulle $f \equiv 0$

<u>Cherchons la CV Uniforme</u>.
On a

$$\begin{aligned} \sup_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} \sin^n(x)(1-\sin(x))^n \\ &= \sup_{x\in[0,1]} X^n(1-X)^n \\ &= \sup_{x\in[0,1]} [X(1-X)]^n \end{aligned}$$

On pose $h_n(X) = [X(1-X)]^n$
Alors $h_n^{'}(X) = n[X(1-X)]^{n-1}(1-2X)$
D'où si $h_n^{'}(X) = 0 \Leftrightarrow X = \frac{1}{2}$

X	0		$\frac{1}{2}$		1
$h_n'(X)$	0	$+$	0	$-$	0
$h_n(X)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4^n}$	$\searrow$	0

D'où $\sup_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{4^n}$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} |f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{4^n} = 0$
Finalement $(f_n)_n$ est CV Uniformement vers $f \equiv 0$
On a $(f_n)_n$ est continue sur intervale fermé borné $[0,\frac{\pi}{2}]$ convergeant uniformement vers $f \equiv 0$
Alors par le Théoréme d'integration

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \sin^n(x)(1-\sin(x))^n dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \sin^n(x)(1-\sin(x))^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = 0$$

3. Dérivation

Théorème 0

Théorème de dérivation

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions sur l'intervalle $[a,b]$, $(a<b)$ telle que :

1. f_n est de classe C^1
2. $\exists x_0 \in [a,b]$ telle que la suite $(f_n(x_0))_n$ CV (càd $\exists l \in \mathbb{R}$ tq $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_0) = l$)
3. La suite de fonctions $(f_n^{'})_n$ CV. U vers une fonction g

Alors :

— a) $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout intervalle fermé borné $[a,b]$ vers la fonction f définie par :

$$f(x) = l + \int_{x_0}^{x} g(t)dt$$

— b) f est dérivable sur $[a,b]$ et on a $f^{'}(x) = g(x), \qquad \forall x \in [a,b]$

Preuve.

On a $(f_n)_n$ est de C^1 alors on peut écrire $\forall x \in [a,b]$

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} \underbrace{f_n^{'}(t)dt}_{\text{continue}}$$

Soit alors $x \in [a,b]$, on a

$$\begin{aligned} |f_n(x) - l - \int_{x_0}^{x} g(t)dt| &= |f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n^{'}(t)dt - l - \int_{x_0}^{x} g(t)dt| \\ &\leq |f_n(x_0) - l| + |\int_{x_0}^{x} f_n^{'}(t)dt - \int_{x_0}^{x} g(t)dt| \qquad (*) \end{aligned}$$

Pour le théoreme de l'integration, puisque $(f_n^{'})_n$ converge uniformement vers g alors la suite $(\int_{x_0}^{x} f_n^{'}(t)dt)$ convege vers $\int_{x_0}^{x} g(t)dt$ sur$[a,b]$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,b]} |\int_{x_0}^{x} f_n^{'}(t)dt - \int_{x_0}^{x} g(t)dt| = 0$$

Par conséquent de $(*)$, on a

$$0 \leq \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - l - \int_{x_0}^{x} g(t)dt| \leq |f_n(x_0) - l| + \sup_{x\in[a,b]} |\int_{x_0}^{x} f_n^{'}(t)dt - \int_{x_0}^{x} g(t)dt|$$

Par le théoréme de comparaison pour les suites

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - l - \int_{x_0}^{x} g(t)dt| \leq \lim_{n\to+\infty} |f_n(x_0) - l| + \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,b]} |\int_{x_0}^{x} f_n^{'}(t)dt - \int_{x_0}^{x} g(t)dt|$$

(comme $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_0) = l$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - l - \int_{x_0}^{x} g(t)dt| = 0$$

$\Leftrightarrow (f_n)_n$ CV Uniformememt vers un fonction f définie par

$$f(x) = l + \int_{x_0}^{x} g(t)dt$$

comme la fonction $x \to h(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt$ dérivable et sa dérivée $h^{'}$ est donné par $h^{'}(x) = g(x)$ alors

$$\forall x \in [a,b], \qquad f^{'}(x) = g(x)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

càd

$$(\lim_{n\to+\infty} f_n(x))^{'} = \lim_{n\to+\infty} (f_n(x))^{'}$$

On peut donc dans ce cas intervertir la limite et la dérivée $\square$

2 Série de fonctions